

Homework #4 & Take-home midterm

截止日期：4 月 22 日 23:59 之前

问题 #1

令 $d \geq 1$ 为一个整数, 令 T_d 为 d 阶的切比雪夫多项式.

1. 请证明在 $[-1, 1]$ 上的无穷范数的意义下, $x^d - \frac{1}{2^{d-1}} T_d(x)$ 是 x^d 的最优的 $d-1$ 阶近似, 其中, $[-1, 1]$ 上的无穷范数定义如下:

$$\|p\|_{\infty} = \sup_{x \in [-1, 1]} |p(x)|.$$

2. 给定一个 d 次多项式, $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$, 请给出在 $[-1, 1]$ 上的无穷范数意义下, $p(x)$ 的最优 $d-1$ 阶近似.

问题 #2

一位军官在她的保险箱中存放了一封重要的信. 以防她在战斗中牺牲, 她决定与她的部队分享密码 (该密码为一个数字). 然而, 所有人都知道部队中有 3 名间谍, 但除了这三名间谍自己, 没有人知道他们是谁. 这 3 名间谍可以相互协调, 他们要么撒谎使人们无法打开保险箱, 要么会尝试他们自己打开保险箱 (如果他们能打开的话). 因此, 军官希望分享密码的方案能满足以下条件:

- 当他们中的 M 人聚在一起时, 即使他们中间有间谍, 他们也能确保打开保险箱.
- 这 3 名间谍的密码不足以让他们三人打开保险箱.

请帮助军官设计一个分享她的密码的方案. 这个方案是什么? 最小的 M 是多少? 展示你的方案并论证为什么你的方案有效, 并证明任何更小的 M 都不能工作. 注意: 部队只有一次机会打开保险箱; 如果打开失败, 保险箱将自毁.

问题 #3

1. 给定单位长度向量 $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$, 即 $\|\vec{x}\|_2 = \|\vec{y}\|_2 = 1$. 求正交矩阵 Q 使得 $Qy = x$.
2. 更一般地, 给定 $\mathbb{R}^m$ 里面的单位长度向量 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ 和 $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$. 假设 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ 是两两正交的, 且 $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ 也是两两正交的, 求正交矩阵 Q 使得 $\forall i, Qy_i = x_i$.

问题 #4

回顾最小二乘法的法线方程 $A^\top Ax = A^\top b$, 其中 A 是实数矩阵. 一般来说, $A^\top A$ 可能是不可逆的. 假设 $A^\top A$ 的最大特征值为 1.

1. 对于固定的 $\delta > 0$, $\text{cond}_2(A^\top A + \delta I)$ 最大可能是多少? 注: $\text{cond}_2(\cdot)$ 特指由 2-范数所诱导的矩阵的条件数.
2. 记 $\bar{x} = (A^\top A + \delta I)^{-1} A^\top b$. 证明:

$$\bar{x} = \arg \min_x \|Ax - b\|_2^2 + \delta \|x\|_2^2.$$

3. 设矩阵 A 的 SVD 分解为 $A = U\Sigma V^\top$. 假设 A 的列是满秩的, 则最小二乘解可以写作 $x_{LS} = \sum_i \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^\top b$. 为了让最小二乘法更加稳定, 一个思路是直接舍弃掉 $\sigma_i \approx 0$ 的那些项. 试写出 $\bar{x}$ 的一个类似的表达式, 并分析为什么它能实现类似于“舍弃掉 $\sigma_i \approx 0$ 的那些项”的效果.

问题 #5

给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 记 A_i 为 A 的第 i 行, $A^{(j)}$ 为 A 的第 j 列. 求证:

$$\|A\|_{1 \rightarrow 2} = \max_{j: 1 \leq j \leq n} \|A^{(j)}\|_2,$$

$$\|A\|_{2 \rightarrow \infty} = \max_{i: 1 \leq i \leq n} \|A_i\|_2.$$

HINT: 第二个等式可能用到 Cauchy-Schwarz 不等式: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle.$$

问题 #6

1. 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 假设对 $A^\top A$ 的楚列斯基 (Cholesky) 分解有 $A^\top A = LL^\top$, 其中 L 为下三角阵. 考虑 $Q := A(L^\top)^{-1}$, 请证明 Q 的列是正交的, 并推导 $A^\top A$ 的楚列斯基 (Cholesky) 分解与 A 的 QR 分解之间的关系.
2. 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$, 它一定能被分解为 $A = RQ$, 其中 R 为上三角阵, 且 Q 为正交矩阵. 请设计一个分解的方法, 进而证明 $A = RQ$ 分解的存在性.

HINT: 尝试修改 Gram-Schmidt 过程。

问题 #7

给定常数 $u > 0$ 和任意向量 $v \in \mathbb{R}^n$, 试找出最小化 $u \|x\|_1 + \frac{1}{2} \|x - v\|_2^2$ 的向量 x 。

HINT: 可以尝试求解 $n = 1$ 的情况。

问题 #8 (Stability of sorting)

给定向量 $X = (X_1, \dots, X_n)$, 它排序后的版本记作 $\text{sort}(X) = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$, 满足 $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$. 考虑对 X 加入了一些噪声之后得到的向量 Y , 同样记 Y 排序后的版本为 $\text{sort}(Y)$ 满足 $Y_{(1)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$.

注意噪声可能改变了元素的大小顺序。

1. 证明 $|X_{(1)} - Y_{(1)}| \leq \|X - Y\|_2$.
2. 证明 $|X_{(n)} - Y_{(n)}| \leq \|X - Y\|_2$.
3. 证明对所有 k , $|X_{(k)} - Y_{(k)}| \leq \|X - Y\|_2$.
4. 证明 $\|\text{sort}(X) - \text{sort}(Y)\|_1 \leq \|X - Y\|_1$.

问题 #9

一般来说, 一个矩阵的秩是不连续的。事实上, 可逆矩阵的集合在实数矩阵里面是一个稠密集。这就意味着, 一个非满秩的矩阵, 可以通过一个任意小的扰动使其变得满秩。这里研究一个相对更稳定的秩的定义, 这样的稳定性让 Stable rank 作为 rank 的一个替代量在低秩矩阵近似的研究中得到广泛应用。

一个实矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的 stable rank 定义为

$$\text{STABLE-RANK}(A) \equiv \frac{\|A\|_F^2}{\|A\|_2^2}$$

1. 当矩阵 A 的列向量都等于 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ 时, 证明 $\text{STABLE-RANK}(A) = 1$ 。
2. 当矩阵 A 的列向量是 orthonormal 时, 证明 $\text{STABLE-RANK}(A) = n$ 。
3. 更一般的, 证明 $1 \leq \text{STABLE-RANK}(A) \leq n$ 。
4. 证明 $\text{STABLE-RANK}(A) \leq \text{RANK}(A)$ 。